



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Soluții și bareme orientative

Clasa a V-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Se notează cu a numărul de răspunsuri corecte. Punctajul obținut pentru răspunsurile corecte este $5a$. Punctajul care se va scădea pentru răspunsurile greșite va fi $2(40 - a)$.

Punctajul total va fi $5a - 2(40 - a)$. (2p)

a) $5a - 2(40 - a) = 144 \Rightarrow 7a = 224 \Rightarrow a = 32$ răspunsuri corecte (elevul a rezolvat greșit 8 exerciții). (2p)

b) $5a - 2(40 - a) = 165 \Rightarrow 7a = 245 \Rightarrow a = 35$ răspunsuri corecte, elevul ar fi trebuit să rezolve corect încă 3 exerciții. (2p)

c) Punctajul maxim care se putea obține este $5 \times 40 = 200$ puncte. (1p)

2. Numărul a se scrie $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 \cdot 2019$, deci numărul este divizibil cu 2018 și atunci restul este 0. (3p)

Numărul $b = (8 \cdot 0 + 1) + (8 \cdot 1 + 1) + \dots + (8 \cdot 252 + 1) = 8 \cdot 126 \cdot 253 + 253 = 255277$ (2p)

$\Rightarrow y = 2018 \cdot 126 + 1009$ și atunci restul este 1009. (2p)

3. Deoarece $\overline{ab} + a + b = 11a + 2b \in \{11, 12, \dots, 117\}$, (1p)

relația din enunț devine: $11a + 2b = n^2$ cu $n = \overline{4, 10}$. (1p)

Considerăm toate valorile lui $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ și obținem soluțiile:

$a = 1, b = 7; a = 2, b = 7; a = 3, b = 8; a = 7, b = 2; a = 8, b = 6$. (5p)

4. a) Deoarece

$$2018^{n+1} + 2018^n = 2018^n \cdot (2018 + 1) = 2018^n \cdot 2019 : 2018 \cdot 2019, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1),$$

iar

$$2019^{n+1} - 2019^n = 2019^n \cdot (2019 - 1) = 2019^n \cdot 2018 : 2018 \cdot 2019, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2).$$

Dinn (1) și (2) deducem:

$$(2018^{n+1} + 2019^{n+1} + 2018^n - 2019^n) : 2018 \cdot 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3p)$$

b) Dacă p este un număr prim mai mare ca 2, atunci $p = 4k + 1$ sau $p = 4k + 3$. Notăm cu $u(n)$ ultima cifră a lui n . (1p)

Pentru $p = 4k + 1$ avem:

$$u(1^p + 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p + 7^p + 8^p + 9^p + 10^p) = u(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0) = 5$$

$$\text{, iar pentru } p = 4k + 3 \text{ avem } u(1^p + 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p + 7^p + 8^p + 9^p + 10^p) = u(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 0) = 5. \quad (1p)$$

Așadar, pentru orice p număr prim, dacă grupăm termenii câte **10**, obținem ultima cifră **5**. În suma noastră putem forma **201** grupe de câte **10** termeni și mai rămân **6** termeni:

$$2011^p + 2012^p + 2013^p + 2014^p + 2015^p + 2016^p + 5 \cdot (2017^p + 2018^p), \text{ apoi scădem}$$

1. (1p)

$$\text{Vom avea } u(A) = u(210 \cdot 5 + 1^p + 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p + 5 \cdot (7^p + 8^p) - 1) = 5.$$

Prin urmare A se divide cu **5**.

(1p)