Soluții și bareme orientative
Clasa a VI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Soluția I

Notăm cele trei numere cu x, y, respectiv z. Din datele problemei deducem că:
$2x + 3y + 4z = 99$ (1);
$3x = 2y$ (2);
$5y = 3z$ (3). **(3p)**

Relațiile (2) și (3) se mai scriu $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ de unde se obține șirul de rapoarte: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$. Fie k valoarea comună a rapoartelor $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$, de unde
$\frac{x}{2} = k \Rightarrow x = 2k, \frac{y}{3} = k \Rightarrow y = 3k, \frac{z}{5} = k \Rightarrow z = 5k$, **(2p)**
valori care înlocuite în relația (1) dau $2 \cdot 2k + 3 \cdot 3k + 4 \cdot 5k = 99 \Leftrightarrow 4k + 9k + 20k = 99 \Leftrightarrow 33k = 99 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = 3$, de unde $x = 6, y = 9, z = 15$. **(2p)**

Soluția II

Putem să luăm și astfel:
din $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{20} = \frac{2x+3y+4z}{4+9+20} = \frac{99}{33} = 3$ **(3p)**
$\Rightarrow \frac{2x}{4} = 3 \Rightarrow x = 6; \frac{3y}{9} = 3 \Rightarrow y = 9; \frac{4z}{20} = 3 \Rightarrow z = 15.$ **(4p)**

2. Deoarece $6a = 2^{x+1} \cdot 3^{y+1}$ și $30a = 5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^{y+1}$, obținem egalitatea **(1p)**
$20 + (x + 2) \cdot (y + 2) = 2(x + 2) \cdot (y + 2) \Leftrightarrow 20 = (x + 2) \cdot (y + 2)$. **(2p)**

Apar următoarele situații:

i) $x + 2 = 2$ și $y + 2 = 10$;
ii) $x + 2 = 4$ și $y + 2 = 5$;
iii) $x + 2 = 5$ și $y + 2 = 4$;
iv) $x + 2 = 10$ și $y + 2 = 2$.

Obținem: i) $x = 0$ și $y = 8$; ii) $x = 2$ și $y = 3$; iii) $x = 3$ și $y = 2$; iv) $x = 8$ și $y = 0$.
În concluzie, numerele căutate sunt $2^0 \cdot 3^8, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^2, 2^8 \cdot 3^0$. **(4p)**

3. Deoarece $[OM$ este bisectoarea unghiului AOB, avem că $m(\sphericalangle MOB) = 54^0$ și pentru că $[ON$ este bisectoarea unghiului BOC, avem că $m(\sphericalangle NOB) = 34^0$ **(2p)**
$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle NOB) + m(\sphericalangle MOB) = 88^0$ **(1p)**

Deoarece $[OP$ este bisectoarea unghiului MON, avem că $m(\sphericalangle MOP) = 44^0$ **(1p)**

$m(\sphericalangle POB) = m(\sphericalangle MOB) - m(\sphericalangle MOP) = 10^0$ **(1p)**
$\sphericalangle POB \equiv \sphericalangle QOD$ **(1p)**
Cum P, O, Q sunt coliniare, obținem că B, O, D sunt coliniare. **(1p)**

4. a) Avem $A_0A_p = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{p-1}A_p = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} =$
$= 2^p - 1$. **(2p)**
Dacă $A_0A_p = 2047$, adică $2^p - 1 = 2047 \Rightarrow 2^p = 2^{11} \Rightarrow p = 11$. **(1p)**
b) Din punctul a) avem $A_0A_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$.

$A_2A_{12} = A_0A_{12} - A_0A_2 = (2^{12} - 2^2)\ cm$. Dacă M este mijlocul lui $[A_2A_{12}]$, atunci $A_2M = MA_{12} = 2^{11} - 2 = 2046\ cm$.

De aici $A_0M = A_0A_2 + A_2M = 3 + 2046 = 2049\ cm$. **(2p)**

Analog $A_4A_{10} = A_0A_{10} - A_0A_4 = (2^{10} - 2^4)\ cm$, de unde $A_4N = NA_{10} = 2^9 - 2^3 = 504\ cm$ și atunci $A_0N = A_0A_4 + A_4N = 15 + 504 = 519\ cm \Rightarrow MN = A_0M - A_0N = 1530\ cm$. **(2p)**